(12×3 p.) **I. A minimumkövetelményből.**

1. Mit jelent, hogy egy $f : A \to B$ függvény injektív?

$\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$

2. Írja le a Bernoulli-egyenlőtlenséget.

$\forall x_1, \dots, x_n > -1$ azonos előjelű számokra
$(1+x_1)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n$

3. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat. Definiálja a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ mennyiséget.

A részsorozatok határértékei közötti legkisebb ($\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$-beli) értéket jelöli $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

4. Írja le a Jensen-egyenlőtlenséget.

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor $\forall x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ esetén
$f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$

5. Mit jelent, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konkáv?

$\forall a < b,\ \forall\ 0 \leq t \leq 1$ esetén $f(ta + (1-t)b) \geq t f(a) + (1-t) f(b)$

6. Írja le a Lagrange-féle középérték tételt.

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, akkor
$\exists\ a < c < b$, hogy $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

7. Mit jelent, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nulla mértékű?

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ I_n \subset \mathbb{R}$ intervallumok, hogy $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

8. Mit jelent, hogy egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat Cauchy-sorozat?

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall m, n \geq N$ esetén $|a_m - a_n| < \varepsilon$

9. Írja le a sorok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle gyökkritériumot.

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ (abszolút) konvergens sor
$> 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergens sor

10. Írja le a függvény határértékére vonatkozó átviteli elvet.

Ha $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}\, f$-nek, akkor
$\lim\limits_{a} f = A \iff \forall x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n \in \mathrm{Dom}\, f$ sorozatra $f(x_n) \to A$

11. Írja le a sorok konvergenciájára vonatkozó kondenzációs kritériumot.

Ha $a_n \geq 0$ monoton csökkenő, akkor
$\sum a_n$ konv $\iff \sum 2^n a_{2^n}$ konv

12. Mit jelent, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban?

Létezik és véges a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték.

II. Igaz vagy Hamis? Az állítás előtti I vagy H betűt karikázza be, annak megfelelően, hogy az állítás igaz vagy hamis. *(15×3 p.)*

1. I H — Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyenletesen folytonos.

2. I H — Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos, akkor folytonos.

3. I H — Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható az $]a, b[$ halmazon, akkor f Riemann-integrálható.

4. I H — Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor f folytonos.

5. I H — Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

6. I H — Ha egy sorozatnak létezik konvergens részsorozata, akkor a sorozat korlátos.

7. I H — Ha egy sorozat Cauchy-sorozat, akkor korlátos.

8. I H — Ha $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, akkor az $\alpha\beta$ sorozat határértéke nulla vagy végtelen.

9. I H — Ha az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ teljesül, akkor a $\sum\limits_{n} \alpha$ sor konvergens.

10. I H — Ha az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ teljesül és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(0)$.

11. I H — Ha egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem zárt, akkor van olyan $f : A \to \mathbb{R}$ függvény, ami folytonos, de nem korlátos.

12. I H — Ha egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nyílt, akkor nem zárt.

13. I H — Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden pontban folytonos, akkor egyenletesen folytonos.

14. I H — Legyen T_2 az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 0 pontbeli másodfokú Taylor-polinomja. Ekkor van olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $x \in\,]-1, 1[$ pontra $|f(x) - T_2(x)| \leq Cx^2$ teljesül.

15. I H — Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $]a, b[$ halmazon, és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in\,]a, b[$ pont, melyre $f'(c) = 0$ teljesül.

(10 p.) **III. Bizonyítás.** Bizonyítsa be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $c \in \mathbb{R}$ pontban, akkor ott folytonos is.

$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ miatt $\exists\ \varepsilon(x)$ függvény, hogy

$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) + \varepsilon(x)$ és $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$

Az egyenlőséget átrendezve

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c)\cdot(x-c)}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\to 0}\cdot\underbrace{(x-c)}_{\to 0} \to f(c), \text{ ha } x \to c$$

Ezért f folytonos c-ben $\square$

IV. Ellenpélda. *(3×3 p.)*

1. Adjon meg egy olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, amely nem Riemann-integrálható

$f(x) = \frac{1}{x}$ $(0,1]$-en, $f(0) = \pi$

vagy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1 & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

2. Adjon meg egy olyan $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozatot, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergens.

$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ -re $\sum a_n$ Leibniz típusú, ezért konvergens, $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ divergens

3. Adjon meg egy olyan sorozatot, melynek nincsen konvergens részsorozata.

$a_n = n$

(4×4 p.) **I. Határozatlan integrál.** Adja meg az alábbi integrálokat.

1. $\displaystyle\int \sin(4x+2) - \sqrt{x\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x}}}_{x\cdot x^{3/4}}}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(\sin(4x+2) - x^{7/8}\right) dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{4}\cos(4x+2) - \frac{8}{15}x^{15/8} + C, \quad x \geq 0$

2. $\displaystyle\int (2x-7)\,\mathrm{ch}(3x+1)\,\mathrm{d}\,x = (2x-7)\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{sh}(3x+1) - \frac{2}{3}\int \mathrm{sh}(3x+1)\,dx$

$\displaystyle = \frac{2x-7}{3}\,\mathrm{sh}(3x+1) - \frac{2}{9}\,\mathrm{ch}(3x+1) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ (Útmutatás: Célszerű a $t = \sqrt{x}$ helyettesítés.) $\displaystyle = \int \frac{t}{1+t}\,2t\,dt =$

$x = t^2$
$dx = 2t\,dt, \quad t \geq 0$

$\displaystyle = 2\int \frac{(t^2+t)-(t+1)+1}{t+1}\,dt = t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{(2x+2)+1}{(x+1)^2}\,dx = 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

$x \neq -1$

II. Határozott integrál. Az alábbi (I_1, I_2, I_3) számok értéke egy-egy pozitív egész szám. Mik ezek a számok konkrétan? *(3×5 p.)*

1. $I_1 = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2} + x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1}_{\frac{\pi}{8}} - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx\right)$

$= \frac{4}{\pi} + 1 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \frac{4}{\pi} + 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\underbrace{\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1}_{\frac{\pi}{4}} = 2$

2. $I_2 = 32\int_0^{\ln 2} (\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}\,x = 16\left[\operatorname{sh}^2 x\right]_0^{\ln 2} = 4\left(e^x - e^{-x}\right)^2\Big|_{x=\ln 2}$

$= 4\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 9$

3. $I_3 = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin(\sqrt{2}\,x)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$

(2×5 p.) **III. Határozott integrál alkalmazásai.**

1. Számolja ki annak a testnek a térfogatát, amit úgy kapunk, hogy a szinusz függvény grafikonjának két szomszédos zérushely közé eső részét az x tengely körül megforgatjuk.

$$V = \pi \int_a^b f^2 = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1-\cos 2x) dx = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{2}$$

2. Tekintsünk egy egységnyi sugarú félgömböt. A félgömb alapsíkjától milyen messze lesz a félgömb felszínének a súlypontja?

Az $x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ paraméterezésű görbe x tengely körüli forgatásával kapott felület súlypontja $(S_x, 0, 0)$, ahol

$$S_x = \frac{2\pi \int_\alpha^\beta x y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}{2\pi \int_\alpha^\beta y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}.$$

Most az $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ paraméterezésű negyedkörívet forgatjuk az x tengely körül, ezért

$$S_x = \frac{\cancel{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt}{\cancel{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt} = \frac{\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{1} = \frac{1}{2}$$

IV. Improprius integrál. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e, és ha igen, számolja ki értéküket. *(3×3 p.)*

1. $L_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{2+4x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)\right]_0^\infty}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

2. $L_2 = \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{1+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ divergens, mert $\dfrac{1}{1+2\sqrt{x}} > \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$ és

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{3\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left[x^{1/2}\right]_2^\infty = \infty$

3. $L_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x = \left[\operatorname{arch} x\right]_{1+0}^2 = \operatorname{arch} 2 - \underbrace{\operatorname{arch} 1}_{0} =$

$= \ln(2+\sqrt{3})$

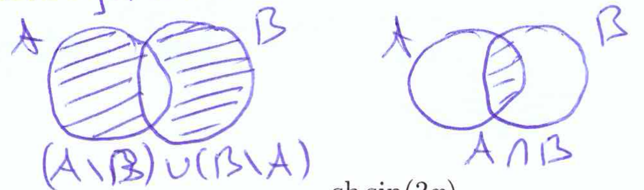
(5×10 p.) **V. Vegyes feladatok.**

1. Mutassa meg, hogy $((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap (A \cap B) = \emptyset$ teljesül, minden A és B halmaz esetén.

$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \iff x$ pontosan az egyik halmaznak eleme.

$x \in A \cap B \iff x$ mindkét halmaznak eleme.

Venn-diagrammal



2. Határozza meg a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} \sin(3x)}{x}$ határértéket.

$\frac{0}{0}$ alakú, alkalmazzuk a l'Hospital szabályt:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch}(\sin 3x) \cdot 3\cos 3x}{1} = \operatorname{ch} 0 \cdot 3 \cdot \cos 0 = 3$$

3. Adja meg az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2 + \sin x)^{x \log x}$ függvény deriváltját.

$$f'(x) = \left[e^{x \ln x \cdot \ln(2+\sin x)}\right]' = e^{x \ln x \cdot \ln(2+\sin x)} \cdot$$

$$\cdot \left[x \ln x \cdot \ln(2+\sin x)\right]' = (2+\sin x)^{x \ln x} \cdot \left[\ln x \cdot \ln(2+\sin x) + \right.$$

$$\left. + \ln(2+\sin x) + x \ln x \cdot \frac{\cos x}{2+\sin x}\right]$$

4. Adott $F \in \mathbb{R}^+$ felszínű anyagból legfeljebb mekkora térfogatú kúpot lehet készíteni? (A kúp egyenes kúp és csak a palástja F felszínű.)

A palástfelszín $F = R \cdot r\pi$, a térfogat

$$V = \frac{h}{3} r^2 \pi = \frac{\pi}{3}\sqrt{R^2 - r^2}\cdot r^2 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{F^2}{r^2\pi^2} - r^2}\cdot r^2 \text{ max} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \frac{F^2}{\pi^2} r^2 - r^6 \text{ max}. \quad f'(r) = 2\frac{F^2}{\pi^2} r - 6r^5 = 6r\cdot\left(\frac{F^2}{3\pi^2} - r^4\right).$$

Ezért f nő $0 \le r \le \sqrt[4]{\frac{F^2}{3\pi^2}}$ esetén, utána csökken $\Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3\pi^2}}$, $R = \frac{F}{r\pi} = \sqrt[4]{\frac{3F^2}{\pi^2}}$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\sqrt{3}F}{\pi} - \frac{F}{\pi\sqrt{3}}}\cdot\frac{F}{\sqrt{3}\pi} = \frac{\sqrt{2}F^{3/2}}{3\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{\pi}}$$

5. Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{50}}\binom{2n}{n}$ sor?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{50}}{(n+1)^{50}}\cdot\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{50}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \to 1^{50}\cdot 4$$

$= 4 > 1 \Rightarrow$ a sor divergens